最速降下問題

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　経営情報学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．　どの経路が速く到達するか

図１のように傾斜面がある．玉がＡからＢまで転がるとき最短時間であるのはどの曲線であろうか．今仮に経路を直線，２次関数，サイクロイドとしよう．ＡとＢを結ぶ最短経路は直線であるので直線がもっとも速く到達するかと思えるが意外と遅い．玉が速く転がるために最初の段階で加速するようにいったん下方に経路をとるほうがよい．直線より２次関数の方が速く到達する．しかし，次数をあげていくと今度は水平方向の速度が遅くなってしまう．

この問題はガリレオ（1564－1642）が最初に提示したと言われている．そしてサイクロイドが最速降下曲線であることが知られている．今回は物理では変分法といわれる分野の問題をあつかい，サイクロイド曲線の魅力ある性質を紹介しよう．

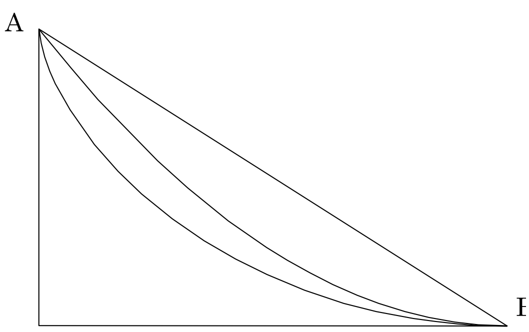

図１．どの経路が最短時間？

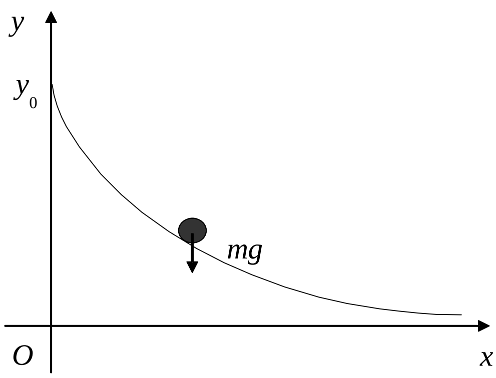

図２　外力は重力のみ

２．　数値計算と模型の作成

曲線の形を解析的に求める前に，問題の概略を知るために数値計算をしてみよう．私はパソコンの表計算ソフトでいくつかの曲線について到達時間を計算させてみた．図２のように座標軸をとり，高さが y_0 の地点から玉を転がすことにする．玉に働く力は重力 mg だけであるから，位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であるエネルギー保存則から，高さが y の時の速度 v は次のように求まる．

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \qquad (2.1)$$

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)} \qquad (2.2)$$

曲線の形を固定すると微小区間での距離 ds が求まり，距離 ds を速さ v で割ると微小時間 dt が求まる．このような微小時間 dt を積分すれば到達時間になる．

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad (2.3)$$

$$dt = \frac{ds}{v} \qquad (2.4)$$

$$T = \int dt \qquad (2.5)$$

数値データとしては縦２メートル横π(=3.14)メートルのモデルで，曲線の刻みを 100 等分とした.その結果,到達時間は直線が 1.189 秒，２次関数が 1.046 秒，３次関数が 1.019 秒，楕円が 1.007 秒，サイクロイドが 1.003 秒となった．直線が一番遅く，サイクロイドが一番速かった．楕円とサイクロイドの差は 0.004 秒とわずかであった．

パソコンで到達時間を確認したが実感がわかないので，私は実際に模型を作ってみたくなった．大きなものを作りたいが，製作費用と保管を考えて縮小モデルを考えた.DIY 店で縦横が 30 センチ×45 センチでのシナ合板が見つかった．板の厚さは 1.2 センチでパチンコ玉の直径が 1.1 センチなので充分な厚みであった.パソコンでは直線が 0.445 秒，２次関数が 0.391 秒,サイクロイドが 0.375 秒であり，実際に実験してみると，サイクロイドと直線の違いは明らかだった

が，サイクロイドと２次関数の違いは相当慎重にしなければならなかった．到達時間の差はパチンコ玉１個分である．

３．　変分法と汎関数

以上は曲線の形が分かった上での数値計算であるが，曲線の形がわからない場合の，到達時間を最小にする問題を考えてみよう(1)．

A, B はスタート地点と到達地点とする．スタート地点の時刻 t_A から到達時刻の t_B までを積分したのが到達時間 T である．

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt \tag{3.1}$$

この dt を x, y, y' で表すことを検討しよう．

曲線の微小要素を ds とすると，ピタゴラスの定理から次の関係が成り立つ．

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{3.2}$$

玉の速度 v は曲線の上で距離を時間で微分すればよいから，次のように書ける．

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{dt} \tag{3.3}$$

式(3.2)(3.3)を使うと，式(3.1)は次のように書きかえられる．

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx = \int_0^x \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v}dx \tag{3.4}$$

y 座標を下方に取とると，落ちた距離 y と速度 v の間にはエネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \tag{3.5}$$

が成り立ち，これを変形すると

$$v = \sqrt{2gy} \tag{3.6}$$

となる．これを式(3.4)に代入し，$\frac{dy}{dx} = y'$ と表記すると次のようになる．

$$T=\int_0^x \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}dx=\int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx \quad (3.7)$$

この式においてTを最小にするにはどうすればよいのだろうか．それは，被積分関数

$$L(x,\ y,\ y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \qquad (3.8)$$

をどのように決めればTが最小になるかという変分法の問題となる．

４．オイラー－ラグランジュ方程式

ここで，$L(x,\ y,\ y')$を与えられた関数として積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} L(x,\ y,\ y')dx \qquad (4.1)$$

が極値となるように関数$y(x)$を定める問題を考えてみよう．Iを汎関数とよぶ．普通の関数に対して，「関数の関数」の意味を示している．求める関数$y(x)$から少し変位させた関数として

$$Y(x)=y(x)+\varepsilon\delta(x) \qquad (4.2)$$

をとり，積分

$$I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} L(x,Y,Y')dx \qquad (4.3)$$

が極値となる条件

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0 \qquad (4.4)$$

を考える．Y,Y'がともにεに依存し，$\dfrac{dY}{d\varepsilon}=\delta(x),\quad \dfrac{dY'}{d\varepsilon}=\delta'(x)$であることに注意して微分を実行すると

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left.\left(\frac{\partial L}{\partial Y}\delta(x)+\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)\right)\right|_{\varepsilon=0}dx \qquad (4.5)$$

右辺第 2 項を部分積分すると

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)dx=\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial Y'}\right)\delta(x)\,dx \qquad (4.6)$$

である． x_1, x_2 において $\delta(x)=0$ であるから，この式の右辺第 1 項はゼロである．よって極値条件は

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta(x)dx=0 \qquad (4.7)$$

となる． $\delta(x)$ は任意であるから， $y(x)$ を決める条件として

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0 \qquad (4.8)$$

を得る.この式をオイラー方程式またはオイラー－ラグランジュ方程式という.変分法は，屈折率の違う媒質の中を光が通過するときどのような経路をたどるかというフェルマーの原理に由来がある．通過する時間を最小にするように経路が選ばれるという変分原理が働いている.

５．オイラー方程式を解く

さて， $L=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$ をオイラー－ラグランジュの方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$ に代入すればよいが， L には x が陽に含まれていない．つまり y と y' だけの関数になっている．これにはオイラー方程式を変形したつぎの公式が使える.

$$L-y'\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=C \qquad (5.1)$$

これに L を代入すると，

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}-y'\left(\frac{y'}{\sqrt{2gy\left(1+y'^2\right)}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C \qquad (5.2)$$

両辺を自乗すると次の形に整理できる．右辺は定数なので $2A$ と置く.

$$y\left(1+y'^2\right)=\frac{1}{2gC^2}=2A \qquad (5.3)$$

式(5.3)を次のように変形する.

$$y' = \sqrt{\frac{2A - y}{y}} \qquad (5.4)$$

曲線の定義域として

$$2A \ge y \ge 0 \qquad (5.5)$$

とする．また，初期条件として $\theta = 0$ のとき $y = 0$ とする．このとき y を次のようにパラメータ表示で変数変換する．

$$y = A - A\cos\theta \qquad (5.6)$$

この変数変換(5.6)はやや唐突である．変分法によって関数の形が求まるというよりか，サイクロイドの研究がずいぶん以前から進められていて最速降下曲線であることもわかっていた．そこで，この曲線を仮定して変分法で解を求めたと理解すればよい．

式(5.6)の両辺を微分すれば次のようになる．

$$dy = A\sin\theta\, d\theta = 2A\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta \qquad (5.7)$$

この y のパラメータ表示を使うと式(5.7)は次のように書き直すことができる．

$$y' = \sqrt{\frac{2A - y}{y}} = \sqrt{\frac{A + A\cos\theta}{A - A\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (5.8)$$

両辺に dx を掛けて，次のように書いておく．

$$dy = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}dx \qquad (5.9)$$

式(5.7)と式(5.9)を連立して，dy を消去すれば x と θ の関係式を求めることができる．

$$dx = 2A\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = A(1 - \cos\theta)d\theta \qquad (5.10)$$

両辺を積分して

$$x = A(\theta - \sin\theta) + D \qquad (5.11)$$

初期条件として $\theta = 0$ のとき $x = 0$ とすれば積分定数は $D = 0$ となる．結局，最

速降下曲線の方程式はパラメータ表示では次のようになる．

$$x = A(\theta - \sin\theta) \qquad (5.12)$$

$$y = A(1 - \cos\theta) \qquad (5.13)$$

６．　サイクロイド

サイクロイドの式は半径aの円が直線上を転がるときに，円周上の定点の軌跡として表される．円の回転角度をθとするとき，曲線上の座標は次のようになる．

$$x = a(\theta - \sin\theta) \qquad (6.1)$$

$$y = a(1 - \cos\theta) \qquad (6.2)$$

そして，導関数は

$\dfrac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \dfrac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$となり，

$\cos\theta = 1 - \dfrac{y}{a}$に注意すると

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(dy/d\theta)^2}{(dx/d\theta)^2} = \frac{2a - y}{y} \qquad (6.3)$$

が導かれる．これがサイクロイドの微分方程式で前述の(5.4)式と一致することに注意すること．

高校数学の教科書では，サイクロイドは自転車の輪の１点が運動する軌跡であるといった程度の紹介で終わっていることが多い．サイクロイドのすぐれた性質である最速降下曲線の説明がされることは少なく残念である．

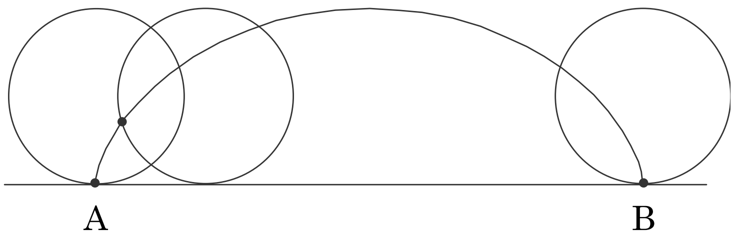

図３．サイクロイド

７．　等時性

振り子の等時性はガリレオが発見した．振り子の長さをl，重力定数をg，振り子のつりあいの位置を原点にとり，振れの角度をθとすると，振り子の運動方程式は次式で表される．

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \qquad (7.1)$$

振れの角度が小さいとき$\sin\theta \approx \theta$を仮定すると，式は次のように簡単になり

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \qquad (7.2)$$

周期Tは次式となる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7.3)$$

サイクロイドは最速降下曲線であることを説明したが，もうひとつの優れた性質，等時性がある．図４のように玉をＡから転がしても，途中のＣから転がしてもＢ点に到達するのは同じ時刻である．

［問１］サイクロイド曲線上では，玉が転がる位置が違っても最下点に到達する時刻は同じであることを証明せよ．

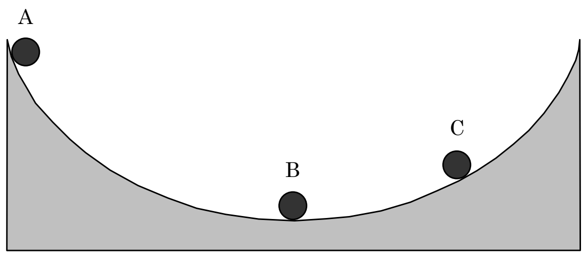

図４．サイクロイドの等時性

ガリレオの振り子は振れが大きくなると，等時性はくずれて周期が長くなる．サイクロイドの上を振り子が行き来するならば等時性が実現できるはずである．ホイヘンス（1629－1695）はつぎのようにして等時性の振り子を実現した．図５のようにサイクロイドを２つ（$0 \le \theta \le 4\pi$）描く．B点を中心にして長さ$4a$（サ

イクロイドの曲線の長さは$8a$）のひもをD点から引っ張りながら開いていくとき，その軌跡Pはサイクロイドになる．このような曲線を伸開線（しんかいせん）と呼ぶ．

［**問２**］サイクロイドの伸開線はサイクロイドになることを証明せよ．

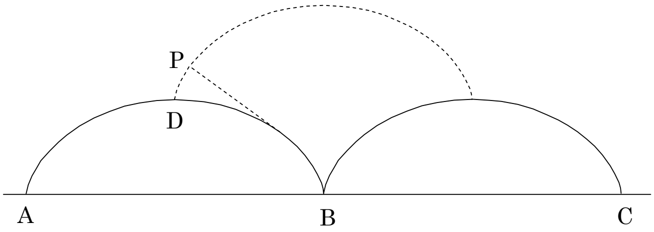

図５．サイクロイドの伸開線はサイクロイド

図５を上下反転させ中央の半分を切り取ったものがホイヘンスの考えたサイクロイド振り子である(図６)．これによると振れが大きくても等時性が保たれ，この原理が応用された時計はガリレオの時計より精度が増したのである．振り子の長さlはサイクロイドの半周期分の長さ$4a$であり，周期Tは

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \qquad (7.4)$$

である．

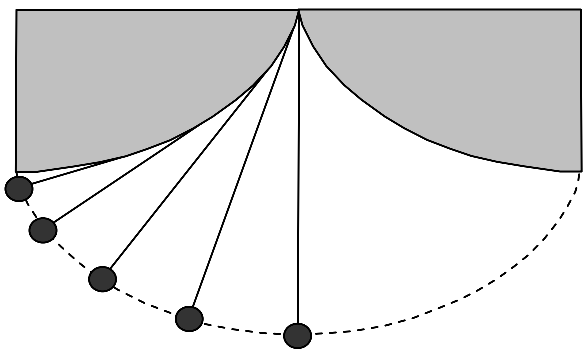

図６．ホイヘンスの振り子

最速降下曲線は今では科学博物館でしか見ることができないが、このことが

サイクロイド曲線の研究や変分学を発展させ、振り子時計の改良に貢献したことを見逃してはならないだろう。

参考文献

(1)　高桑昇一郎『微分方程式と変分法』共立出版，2003